

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ КЕЛЬВИН-ФОЙГТ ЖҮЙЕСІ ҮШІН КЕРІ ЕСЕП. ШЕШІМНІҢ ЖАЛҒЫЗДЫҒЫ

Шәкір Айдос Ғанижанұлы

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

математика кафедрасының аға оқытушысы, PhD

26 қыркүйек 2025
Алматы, Қазақстан



Дәрістің мақсаты – интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің шешімінің жалғыздығын көрсету

Негізгі сұрақтар:

- 1 Интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің әлсіз қойылымы
- 2 Интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есепке эквивалентті локалды емес тура есеп
- 3 Локалды емес тура есептің әлсіз шешімінің жалғыздығы
- 4 Локалды емес тура есептің әлді шешімінің жалғыздығы



Есептің қойылымы

Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ шенелген облыс және оның $\partial\Omega$ жатық шекарасы болсын. $\Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T]$ бүйір бетімен анықталған $Q_T = \Omega \times [0, T]$, $T > 0$ цилиндрінде $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t), f(t))$ функциялар үштігін анықтауға арналған, сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтықтардың ағынын сипаттайтын

$$\mathbf{u}_t - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds - \nabla p = f(t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесін,

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T \quad (2)$$

сығылмайтын сұйықтық теңдеуін,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3)$$

бастапқы шартын,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T \quad (4)$$

сырғанау шекаралық шартын және

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \boldsymbol{\omega} d\mathbf{x} = \mathbf{e}(t), \quad t \in [0, T] \quad (5)$$

қосымша шартты қанағаттандыратын кері есепті қарастырайық,

мұндағы $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ – сұйықтың жылдамдығы мен $p(\mathbf{x}, t)$ – сұйықтың қысымы, ал ν және χ оң сандары, сәйкесінше, сұйықтың кинематикалық тұтқырлық және релаксациясының коэффициенттері, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) := f(t)\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ вектор функциясы сыртқы күштердің тығыздығын, ал $f(t)$ сыртқы күштердің интенсивтілігін сипаттайды. Сондай-ақ, $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$, $e(t)$, $K(t)$ белгілі функциялар.



Definition

(1)-(5) кері есебінің әлсіз шешімі деп

- 1 $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V})$, $\mathbf{u}_t \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V})$, $f(t) \in L^2[0, T]$;
- 2 Ω -да барлық дерлік жерде $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ бастапқы шартты;
- 3 Кез келген $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}$ және барлық $t \in (0, T)$ үшін төмендегі интегралдық тепе-теңдікті

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left((\mathbf{u}(t), \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} + \kappa (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} \right) + \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} = \\ f(t) (\mathbf{g}(t), \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} - ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} - \\ \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} ds. \end{aligned} \quad (6)$$

қанағаттандыратын $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), f(t))$ функциялар жұбын атайды.



Definition

(1)-(5) кері есебінің әлді шешімі деп

- 1 $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)) \cap \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)), \mathbf{u}_t \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)), f(t) \in L^2[0, T];$
- 2 әрбір теңдеуді сәйкес облыстарда барлық дерлік жерде қанағаттандыратын $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), f(t))$ функциялар жұбын атайды.

Әдеттегідей, әлсіз шешімінің анықтамасында p қысым туралы мағлұмат келтірілмеген. Оны [1] мақаладағыдай $\mathbf{u}$ және f функциялары белгілі болғаннан кейін де Рамм леммасын қолданып, (2) теңдеуден бірімәнді қалпына келтіруге болады.



S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh.

The classical Kelvin-Voigt problem for nonhomogeneous and incompressible fluids: existence, uniqueness and regularity. Nonlinearity 34 (2021), no. 5, 3083–3111.



Айталық, есептердің берілгендері келесі шарттарды қанағаттандырсын дейік.

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}; \quad (7)$$

$$\exists k_0 \in \mathbb{R} : 0 < k_0 < \infty, \quad |g_0(t)| = |(\mathbf{g}(t), \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}| \geq k_0 > 0, \quad \forall t \geq 0; \quad (8)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)); \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}, \quad e(t) \in W_2^1([0, T]); \quad (10)$$

$$(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} = e(0); \quad (11)$$

$$K(t) \in L^2([0, T]) : \quad \|K(t)\|_{L^2([0, T])} \equiv K_0 < \infty. \quad (12)$$



Енді (1) теңдеуді $\omega(\mathbf{x})$ функциясына көбейтіп және Ω облыс бойынша интегралдайық. Алынған өрнекті бөліктеп интегралдап, сондай-ақ (5) қосымша және (8) шартты қолдансақ, онда $f(t)$ функциясы келесі түрде анықталады

$$f(t) = \frac{1}{g_0(t)} \left(e'(t) + \kappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \omega)_{2,\Omega} + \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \omega)_{2,\Omega} - \right. \\ \left. ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \omega, \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} + \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \omega)_{2,\Omega} ds \right) := F_1(\mathbf{u}, t). \quad (13)$$

Мұнан соң, (13) өрнекті (1) теңдеуге қойғансақ, онда белгісіз $\mathbf{u}$ және p функцияларын табуға арналған

$$\mathbf{u}_t - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(s) ds - \nabla p = \\ F_1(\mathbf{u}, t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \quad (14)$$

теңдеулер жүйесін, (3) бастапқы және (4) шекаралық шарттарды қанағаттандыратын локалды емес тура есеп алынады, мұндағы $F_1(\mathbf{u}, t) = f(t)$ функциясы (13) өрнекпен анықталады. Демек, (1)-(5) кері есебін, сәйкесінше, (14), (3)-(4) локалды емес тура есепке алып келдік.



Кері есеп пен локалды емес тура есептің эквиваленттілігі жөнінде келесі лемма орынды.

Lemma

Айталық, (8)-(11) шарттар орындалсын. Демек, (1)-(5) кері есебі (14), (3)-(4) локалды емес тура есебіне эквивалентті, яғни (u, p, f) функциялары (1)-(5) кері есебінің шешімі болса, онда (u, p) жұбы (14), (3)-(4) локалды емес тура есебінің шешімі болып табылады және керісінше, (u, p) функциялары (14), (3)-(4) локалды емес тура есебінің шешімі болса, онда ол (13) өрнекпен анықталған $f(t)$ функциясымен бірге (1)-(5) кері есебінің шешімін береді.

(14), (3)-(4) локалды емес тура есебінің әлсіз және әлді шешімінің анықтамасы 1 және 2-анықтамаға ұқсас түрде беріледі.



Theorem

Айталық, шешімнің бар болуы теореманың шарттары орындалсын. Сонымен қатар, u_1 мен u_2 функциялары (1)-(4), (13) есебінің бірдей берілгендері үшін u_1 мен u_2 әлсіз (әлді) шешімі болсын. Онда барлық $(x, t) \in Q_T^*$ үшін (1)-(4), (13) есебінің әлсіз (әлді) шешім жалғыз болады, яғни $u_1 \equiv u_2$, мұндағы T^* – әлсіз (әлді) шешімнің бар болуының максималды уақыты.



$\mathbf{u}_2$ және $\mathbf{u}_1$ үшін (14) теңдеуді жазып және оларды бір-бірін азайтып, шыққан нәтижені сәйкесінше $\mathbf{u} := \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ және $\mathbf{u}_t$ функцияларына $L_2(\Omega)$ кеңістігінде скаляр көбейткенде, сәйкес келесі өрнектер алынады

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right) + \nu \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = \\ & - ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} - \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} ds + \\ & \frac{1}{g_0(t)} \left[\varkappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}_1(t))_{2,\Omega} + \right. \\ & \left. ((\mathbf{u}_2(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}(t)) + \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} ds \right] (\mathbf{g}(t), \mathbf{u}(t))_{2,\Omega}, \end{aligned} \quad (15)$$



$$\begin{aligned}
& \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{u}_t(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = \\
& - ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_t(t))_{2,\Omega} - ((\mathbf{u}_2(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(t), \mathbf{u}_t(t))_{2,\Omega} - \\
& \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}_t^n(t))_{2,\Omega} ds + \frac{1}{g_0(t)} \left[\varkappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \right. \\
& \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}_1(t)) + \\
& \left. ((\mathbf{u}_2(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}(t)) + \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} ds \right] (\mathbf{g}(t), \mathbf{u}_t(t))_{2,\Omega}
\end{aligned} \tag{16}$$



Соңғы алынған теңдіктерді қоссақ, онда төмендегі нәтиже шығады

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\| \mathbf{u}(t) \|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \| \mathbf{u}(t) \|_{\mathbf{V}}^2 \right) + \nu \| \mathbf{u}(t) \|_{\mathbf{V}}^2 + \\
 & \| \mathbf{u}_t(t) \|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \| \mathbf{u}_t(t) \|_{\mathbf{V}}^2 = -((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} + \\
 & ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_t(t))_{2,\Omega} + ((\mathbf{u}_2(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(t), \mathbf{u}_t(t))_{2,\Omega} - \\
 & \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} ds + \frac{1}{g_0(t)} \left[\varkappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \right. \\
 & \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}_1(t))_{2,\Omega} + ((\mathbf{u}_2(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}(t)) + \\
 & \left. \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} ds \right] (\mathbf{g}(t), \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} + \\
 & \int_0^t K(t-s) \nabla \mathbf{u}^n(s) \nabla \mathbf{u}_t^n(t) ds - \frac{1}{g_0(t)} \left[\varkappa (\nabla \mathbf{u}_t, \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \right. \\
 & \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}_1(t)) + ((\mathbf{u}_2(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}(t)) + \\
 & \left. \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} ds \right] (\mathbf{g}, \mathbf{u}_t(t))_{2,\Omega} = \sum_{i=1}^7 R_i.
 \end{aligned} \tag{17}$$



Гельдер мен Юнг теңсіздіктерінің көмегімен (15) өрнектің оң жағындағы қосылғыштарды бағалайық

$$|R_1| = \left| -((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} \right| \leq \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{u}(t)\|_{4,\Omega}^2 \leq C(\Omega) \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2, \quad (18)$$

$$|R_2| \leq \|\mathbf{u}(t)\|_{4,\Omega} \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{4,\Omega} \leq \frac{\varepsilon_0}{8} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{2C^2}{\varepsilon_0} \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2, \quad (19)$$

$$|R_3| \leq \|\mathbf{u}_2(t)\|_{4,\Omega} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{4,\Omega} \leq \frac{\varepsilon_0}{8} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{2C^2}{\varepsilon_0} \|\mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2, \quad (20)$$

$$|R_4| \leq \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}} K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\nu}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{K_0^2}{2\nu} \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds, \quad (21)$$



$$\begin{aligned}
|R_5| &\leq \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega} \|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}}{k_0} \|\omega\|_{\mathbf{V}} [\varkappa \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}} + \nu \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}} + \\
&\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}} + \\
&K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}] \leq \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2}{2k_0^2} \|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}^2 + \\
&\frac{\|\omega\|_{\mathbf{V}}^2}{2} \left[\nu \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \right. \\
&\left. \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \|\mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + K_0^2 \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right] + \\
&\frac{\varepsilon_0}{8} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{2\varkappa^2}{\varepsilon_0 k_0^2} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 \|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}^2
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
|R_6| &\leq \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}} K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\frac{\varepsilon_0}{8} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{2K_0^2}{\varepsilon_0} \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds,
\end{aligned} \tag{23}$$



$$|R_7| \leq \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{2,\Omega}}{k_0} \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}} [\varkappa \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}} + \nu \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}} +$$

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}} + K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}] \leq$$

$$\frac{\varepsilon_1}{4} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2}{\varepsilon_1 k_0^2}.$$

$$\left[\nu \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \|\mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \right.$$

$$\left. K_0^2 \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right] + \frac{\varepsilon_1}{4} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\varkappa^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2}{\varepsilon_1 k_0^2} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \quad (24)$$



Алынған (18)-(24) бағалауларды (17) өрнекке қойғанда, келесі дифференциалдық теңсіздік алынады

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\|u(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\kappa + \nu) \|u(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right) + \nu \|u(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \alpha \|u_t(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \\ & \beta \|u_t(t)\|_{2,\Omega}^2 \leq a_1 \|u(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + a_2 \int_0^t \|u(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds + a_3 \|u(t)\|_{2,\Omega}^2, \end{aligned} \quad (25)$$

мұндағы

$$\alpha := 2 \left(\kappa - \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{\kappa^2}{\varepsilon_1 k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|g(t)\|_{2,\Omega}^2 \|w\|_{\mathbf{V}}^2 \right), \quad \beta := 2 \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{2} \right);$$

$$\begin{aligned} a_1 := & 2C \sup_{t \in [0, T^*]} \|u_1(t)\|_{2,\Omega} + \frac{4C^2}{\varepsilon_0} \sup_{t \in [0, T^*]} \|u_1(t)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{4C^2}{\varepsilon_0} \sup_{t \in [0, T^*]} \|u_2(t)\|_{2,\Omega}^2 + \\ & + \left(\frac{2 \sup_{t \in [0, T]} \|g(t)\|_{2,\Omega}^2 \|w\|_{\mathbf{V}}^2}{\varepsilon_1 k_0^2} + \|w\|_{\mathbf{V}}^2 \right) \times \\ & \left(\nu^2 + \sup_{t \in [0, T^*]} \|u_1(t)\|_{2,\Omega}^2 + \sup_{t \in [0, T^*]} \|u_2(t)\|_{2,\Omega}^2 \right); \end{aligned}$$

$$a_2 := \frac{K_0^2}{\nu} + \|w\|_{\mathbf{V}}^2 K_0^2 + \frac{2 \sup_{t \in [0, T]} \|g(t)\|_{2,\Omega}^2 \|w\|_{\mathbf{V}}^2}{\varepsilon_1 k_0^2} K_0^2 + \frac{4K_0^2}{\varepsilon_0};$$



$$a_3 := \frac{1}{k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2, \Omega}^2 \left(1 + \frac{4\kappa^2}{\varepsilon_0} \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \right).$$

Енді $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2$, функциялары және әлсіз шешім үшін алынған бағалауларда

$$\frac{\kappa}{k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2, \Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq m < 2 \text{ шарты кезіндегі } \varepsilon_i, i = 0, 1 \text{ сәйкес мәнінде}$$

$\alpha, \beta, a_1, a_2, a_3$ коэффициенттері оң және ақырлы болып табылады. Олай болса, (25) өрнекті τ бойынша 0-ден $t \in [0, T^*]$ -ға шейін интегралдасақ, онда келесі теңсіздік қорытылады

$$y(t) \leq a \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad (26)$$

мұндағы

$$y(t) := \|\mathbf{u}(t)\|_{2, \Omega}^2 + (\kappa + \nu) \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2, \quad a := \max \left\{ \frac{1}{\kappa + \nu} (a_1 + T a_2), a_3 \right\}.$$

4-теореманың шарты мен Гронуолл леммасы бойынша (26) өрнектен $t \in [0, T^*]$ үшін $y(t) \equiv 0$ тұжырымдалады, яғни $\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2$.



Қорыта келе, әлсіз шешімнің бар болуы туралы 1.1-теореманы (3-дәріс), әлді шешімнің бар болуы туралы 1.2-теореманы (3-дәріс) және шешімнің жалғыздығы туралы 4-теореманы ескере отырып, сондай-ақ (14), (3)-(4) локалды емес тура есебінің (1)-(5) кері есебіне эквиваленттілігі туралы 3-леммаға сүйеніп бастапқы қойылған кері есеп үшін келесі нәтижелер тұжырымдалады.

Theorem

Айталық, (7)-(12) шарттар орындалсын және қандай да бір m оң саны табылып келесі шарт орындалсын

$$\frac{\varkappa}{k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|g(t)\|_{2, \Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 \leq m < 2. \quad (27)$$

Онда ақырлы $T_1 \in (0, T]$ уақыты табылып, (1)-(5) кері есебінің Q_{T_1} цилиндрінде кемінде бір әлсіз шешімі табылады, мұндағы T_1 мәні кері есептің бастапқы берілгені арқылы анықталады. Сондай-ақ, әлсіз шешім келесі априорлық бағалауды қанағаттандырады

$$\|u\|_{L^\infty(0, T_1; L^2(\Omega) \cap \mathbf{V})}^2 + \|u\|_{L^2(0, T_1; \mathbf{V})}^2 + \|u_t\|_{L^2(0, T_1; L^2(\Omega) \cap \mathbf{V})}^2 + \|f\|_{L^2[0, T_1]}^2 \leq C, \quad (28)$$

мұндағы C есептің берілгендерінен тәуелді тұрақты.



Theorem

Айталық, 5-теореманың шарттары және $u_0(x) \in V \cap H^2(\Omega)$ шарт орындалсын. Олай болса, (1)-(5) кері есебінің Q_{T_1} цилиндрінде кемінде бір әлді шешімі бар болады және ол (28) бағалауға қоса

$$\|u\|_{L^\infty(0, T_1; V \cap H^2(\Omega))}^2 + \|u_t\|_{L^2(0, T_1; V \cap H^2(\Omega))}^2 + \|f\|_{L^2[0, T_1]}^2 \leq C < \infty. \quad (29)$$

бағалау орынды болады, мұндағы T_1 мәні және C есептің берілгендерінен тәуелді тұрақты.



Theorem

Айталық, 5-теореманың шарттары орындалсын. Сонымен қатар, u_1 мен u_2 функциялары (1)-(5) есебінің бірдей берілгендері үшін u_1 мен u_2 әлсіз (әлді) шешімі болсын. Онда барлық $(x, t) \in Q_{T^*}$ үшін (1)-(5) есебінің әлсіз (әлді) шешім жалғыз болады, яғни $u_1 \equiv u_2$, мұндағы T^* – әлсіз (әлді) шешімнің бар болуының максималды уақыты.



НАЗАРЛАРЫҢЫЗҒА
РАҚМЕТ!

